



Дополнительное вступительное испытание

по математике в МГУ имени М.В. Ломоносова

4-й поток, 20.07.2024

ВАРИАНТ 245

1. Найдите наименьшее целое число, превосходящее число $\left(\frac{16}{25}\right)^{\cos(\pi/3)} + \left(\frac{9}{25}\right)^{-\sin(\pi/6)}$.
2. Числа a_1, a_2, \dots, a_{20} образуют арифметическую прогрессию. Найдите её разность, если известно, что $a_1^2 + a_3^2 + \dots + a_{19}^2 = 1330$, $a_2^2 + a_4^2 + \dots + a_{20}^2 = 1540$ и $a_{10} + a_{11} = 21$.
3. Решите неравенство $\log_x \frac{2x}{3-x} \leq 2$.
4. Решите уравнение $\cos 2x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(\cos x + \sin x)$.
5. Окружность Ω_1 с центром O_1 и окружность Ω_2 с центром O_2 пересекаются в точках A и B , причём $\angle O_1AO_2 = 120^\circ$. Окружность, описанная около треугольника O_1AO_2 пересекает окружности Ω_1 и Ω_2 соответственно в точках C и D (отличных от точки A). Найдите угол $\angle BDC$, если известно, что $\angle ACB = 15^\circ$.
6. Числа a, b, c, d положительны и удовлетворяют соотношению $a + b + c + d = 1$. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\frac{a^2}{1-a} + \frac{b^2}{1-b} + \frac{c^2}{1-c} + \frac{d^2}{1-d}.$$

7. Все рёбра прямой треугольной призмы $ABCA'B'C'$ с основанием ABC и боковыми рёбрами AA', BB', CC' равны. Найдите отношение, в котором делит объём этой призмы плоскость, проходящая через вершину C' и через середины рёбер AB, AA' .