



## Дополнительное вступительное испытание

по математике в МГУ имени М.В. Ломоносова

3-й поток, 15.07.2024

ВАРИАНТ 243

1. Найдите целое число, задаваемое выражением  $\log_{1/2} \left( \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \right) + \log_{1/2} \left( \cos \frac{\pi}{6} \right)$ .
2. Найдите сумму всех двузначных чисел, состоящих из одной чётной цифры и одной нечётной цифры (чётные цифры — это 0, 2, 4, 6, 8, нечётные — все остальные).

3. Решите неравенство

$$\frac{4^{x^2} - 16^{4x-8}}{\sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{12 + 4x - x^2}} > 0.$$

4. Решите уравнение  $2 \sin^3 x = \cos 3x$ .

5. На стороне  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  отмечена точка  $D$ , отличная от  $B$  и  $C$ . Пусть  $E$  — точка пересечения отрезка  $AC$  с окружностью, описанной около треугольника  $ABD$ , отличная от  $A$ . Пусть  $F$  — точка пересечения отрезка  $AB$  с окружностью, описанной около треугольника  $ACD$ , отличная от  $A$ . Пусть  $D', E', F'$  — точки пересечения окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , с прямыми  $AD, BE, CF$  соответственно, отличные от точек  $A, B, C$ . Найдите угол  $\angle E'D'F'$ , если известно, что  $\angle EDF = 30^\circ$ .

6. Найдите все тройки положительных чисел  $x, y, z$ , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} (x^2 + xy + y^2)(y^2 + yz + z^2)(z^2 + zx + x^2) = xyz \\ (x^4 + x^2y^2 + y^4)(y^4 + y^2z^2 + z^4)(z^4 + z^2x^2 + x^4) = x^3y^3z^3 \end{cases}$$

7. В основании прямой призмы лежит ромб со стороной 3. Найдите объём призмы, если известно, что существует сфера радиуса 1, касающаяся плоскости нижнего основания, двух противоположных боковых рёбер и всех рёбер верхнего основания.