МГУ - СТАРТ

Дополнительное вступительное испытание

по математике в МГУ имени М.В. Ломоносова

4-й поток, 18.07.2023

ВАРИАНТ 235

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\dfrac{\dfrac{\sqrt{64}}{5}+\dfrac{\sqrt[3]{64}}{3}}{\dfrac{\sqrt{64}}{5}-\dfrac{\sqrt[3]{64}}{3}}$.

2. Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ действительных чисел определяется равенствами

$$a_1 = 0, \qquad a_n = \left(1+\sqrt{n}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right). \quad (n \geqslant 2).$$

Найдите a_{2023}.

3. Решите неравенство

$$\left(3x^2-3x+1\right)^{x^2-3x} \leqslant 1.$$

4. Решите уравнение

$$\cos^2 x + \sqrt{3}\sin^2 x = \left(1+\sqrt{3}\right)\left(\cos x - \cos x \sin x + \sin x\right).$$

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BD и CE. На DE как на диаметре построена окружность. Эта окружность пересекает отрезки AE и AD в точках F и G соответственно. Найдите длину отрезка FG, если известно, что $BC = 25$, $BD = 20$ и $BE = 7$.

6. Найдите все значения параметра k, при которых неравенство

$$a^3+b^3+c^3+6 \geqslant k(a+b+c)$$

справедливо для всех действительных a, b, c, таких что $a \geqslant -2$, $b \geqslant -2$, $c \geqslant -2$.

7. Плоские углы при вершине правильной четырёхугольной пирамиды равны $30°$. Найдите длину ребра основания пирамиды, если известно, что радиус сферы, вписанной в эту пирамиду, равен 1.