



## Дополнительное вступительное испытание

по математике в МГУ имени М.В. Ломоносова

4-й поток, 21.07.2021

ВАРИАНТ 214

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением  $\left( \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} - \frac{2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} \right)^2$ .

2. Бобёр доплывает от своей норы вниз по реке до осиновой рожи за три минуты. Подкрепившись, он плывёт обратно к своей норе, на что у него уходит четыре минуты. Во сколько раз собственная скорость бобра превышает скорость течения? (Собственную скорость бобра считать постоянной).

3. Решите уравнение  $\cos 4x + \cos 2x + \operatorname{ctg}^2 x = 0$ .

4. Решите неравенство  $\log_2 x + \log_3 x \leq \log_2 3 \cdot \log_x 6$ .

5. На сторонах  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $K$  и  $L$  соответственно. Известно, что  $AB = BC = 1$ , что площади треугольников  $AKC$  и  $BCL$  равны и что около четырёхугольника  $AKML$ , где  $M$  — точка пересечения отрезков  $BL$  и  $CK$ , можно описать окружность. Найдите все возможные значения  $AC$ .

6. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение

$$\left( \sqrt{3 + 2x - x^2} - \sqrt{3 - 2x - x^2} \right) \left( \sqrt{a - x^2} - \sqrt{3 - 2x - x^2} \right) \left( \sqrt{a - x^2} - \sqrt{3 + 2x - x^2} \right) = 0$$

имеет ровно одно решение.

7. Дан тетраэдр  $ABCD$ . Известно, что центр сферы, описанной около этого тетраэдра, лежит на  $AB$ , что плоскости  $ABC$  и  $ABD$  перпендикулярны и что  $AD = DC = CB$ . Найдите угол между прямыми  $AD$  и  $CB$ .